



Fissuration des tirants

Silvano ERLICHER



Ministère
de l'Écologie,
du Développement
durable
et de l'Énergie

04/06/2015



- ▶ Comprendre les bases théoriques des codes, en partant du cas élémentaire du tirant
 - Estimer par des simulations numériques la **distribution statistique** de l'espacement et de l'ouverture des fissures (**partie 1**)
 - Comparer les **résultats expérimentaux** avec les **formules des codes** (**partie 2**)
 - Etudier en détail la notion d'**aire effective** et sa prise en compte dans l'évaluation de l'espacement et l'ouverture des fissures (**partie 3**)
- ▶ La formule de l'espacement des fissures de l'EC2 et du CM2010 pour les **voiles** est basée sur la formule de l'espacement des **tirants**

Partie 1.

Distribution statistique
de l'espacement de fissures calculée
à partir de simulations numériques

1. $f_{ct}(x)$ constante par morceaux, avec longueur caractéristique: $l_c \approx 3D_{max}$

(D_{max} = diamètre max. de l'agrégat)

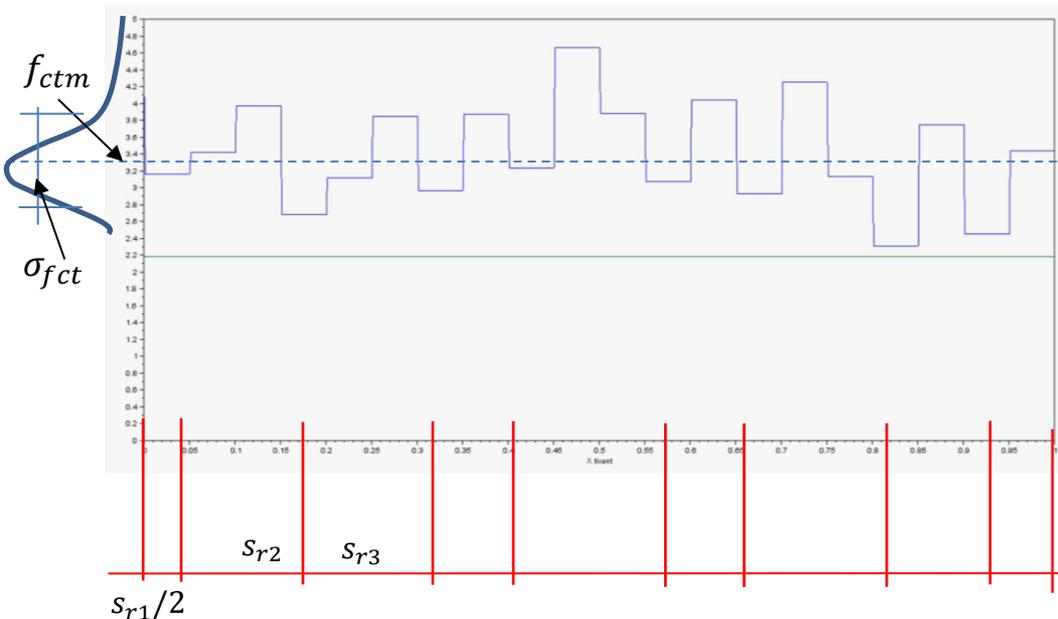
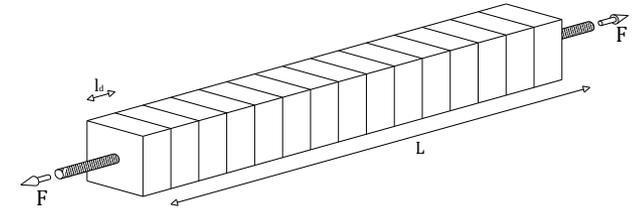
2. Contrainte du béton à la fissure: $\sigma_c(x_f) = 0$

3. Contrainte d'adhérence: $\tau(x) = \tau_o$

→ Contrainte du béton linéaire $\Delta\sigma_c = \frac{4\tau_o\rho_s}{\phi_s} \Delta x$

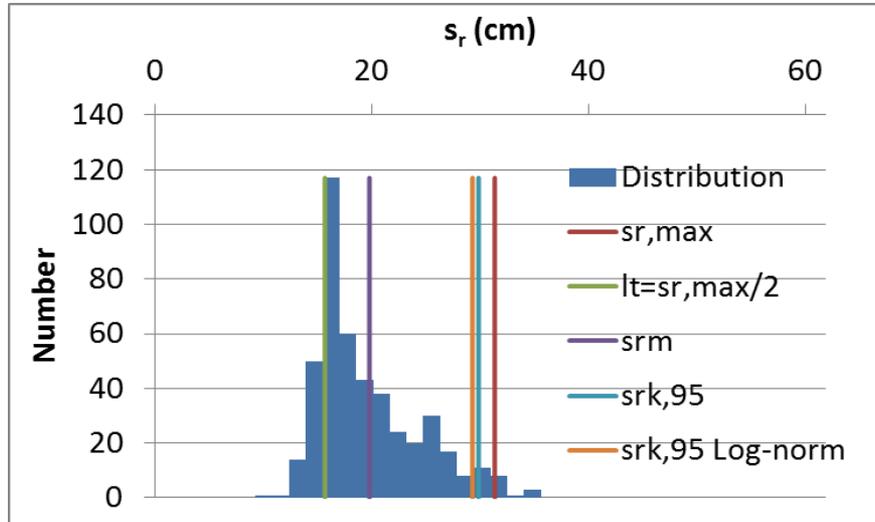
4. $s_{r,max} = 2 l_t$ est une donnée d'entrée

- Ex: $s_{r,max} = 2 l_t := \frac{f_{ctm} \phi}{2\tau \rho}$



La force de traction appliquée au tirant est augmentée jusqu'à obtenir la fissuration stabilisée (algorithme similaire à Beeby, Scott, 2004)

L'histogramme de l'espacement entre fissures peut être finalement tracé



$$CV_{fct} = \frac{\sigma_{fct}}{f_{ctm}} = 0,2$$

Si $0,1 \leq CV_{fct} \leq 0,3$

alors $1,47 \leq \frac{s_{r,max}}{s_{rm}} = \frac{2 l_t}{s_{rm}} \leq 1,61$

CM1990: 1,5

$1,43 \leq \frac{s_{rk,95}}{s_{rm}} \leq 1,59$

EC2, CM2010: 1,7

(Draft EC2-July99, Beeby 72, FIB bull. 2014)

- ▶ La valeur calculée du rapport

$$\frac{S_{r,max}}{S_{rm}} = \frac{2 l_t}{S_{rm}}$$

est légèrement supérieure à 1,5 (valeur CM1990: 1,5)

- ▶ $S_{rk,95} \approx S_{r,max}$

- ▶ Il suit que: $\frac{S_{rk,95}}{S_{rm}} = 1,5 \div 1,7$ (EC2-CM2010: 1,7)

- ▶ Des résultats analogues peuvent être obtenus pour les distributions statistiques de la différence de déformation $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$ et pour l'ouverture de fissures w_r , notamment

$$\frac{w_{rk,95}}{w_{rm}} \approx 1,5$$

Partie 2.

EC2 et CM2010

Vs.

Résultats expérimentaux

	CM2010 (09/2011)	EC2-1-1
Espacement maximal entre fissures	$s_{r,max} = 2c + 0,278 \frac{\phi}{\rho_{eff}}$	$s_{r,max} = 3,4c + 0,34 \frac{\phi}{\rho_{eff}}$

$$\tau_{bm} = 1,8 f_{ctm}$$

$$k_3 \quad k_1 = 0,8 = \frac{2f_{ctm}}{\tau_{bm}} \rightarrow \tau_{bm} = 2,5 f_{ctm}$$

$$k_2 = 1$$

$$k_4 = 1,7/4 = 0,425$$

$$s_{r,max} = 2c + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_{ctm}}{\tau_{bm}} \frac{\phi}{\rho_{eff}}$$

$$s_{r,max} = 1,7 \cdot \left(2c + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_{ctm}}{\tau_{bm}} \frac{\phi}{\rho_{eff}} \right)$$

	CM2010 and EC2
Ouverture des fissures	$w_k = s_{r,max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ctm}}{\rho_{eff}} (1 + \alpha_e \rho_{eff})}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$\alpha_e = E_s / E_{cm}$$

$k_t = \beta = 0.6$: charges à court terme

Pour l'EC2 uniquement

D'après EC2 et CM2010, pour les tirants avec 1 barre au centre:

$$A_{c,eff} = A_c$$

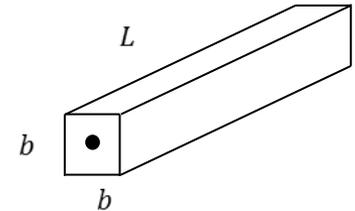
$$\rho_{eff} = \rho$$

▶ EPFL – 123 essais

- 100 x 100 x 1150 mm
- 14 types de ciment, 3 diamètres ($\phi=10, 14, 20$ mm), 3 tests pour chaque cas

▶ CEOS-FR (GINGER – CEBTP / DEXTRA) – 3 essais

- 2 essais: 170 x 170 x 3200 mm, HA40
- 1 essai: 135 x 135 x 3200 mm, HA25



HP: section carrée avec barre au centre

▶ Durham University – 5 essais

- 2 essais: 190 x 190 x 2000 mm; HA25-HA32 (« Wenkenbach »)
- 2 essais: 120 x 120 x 1200 mm; HA20 (« Beeby »)
- 1 essai: 100 x 100 x 1500; HA20 (« Scott »)

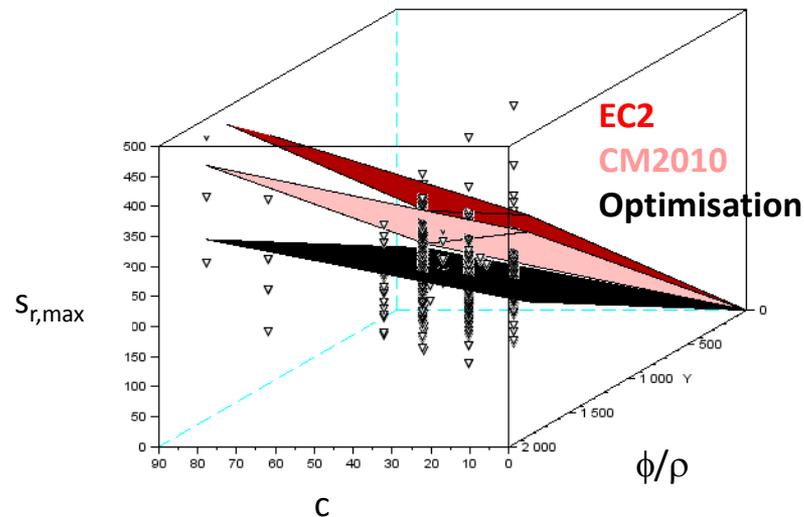
**Mesures : s_r et w_r ,
Fissuration stabilisée**

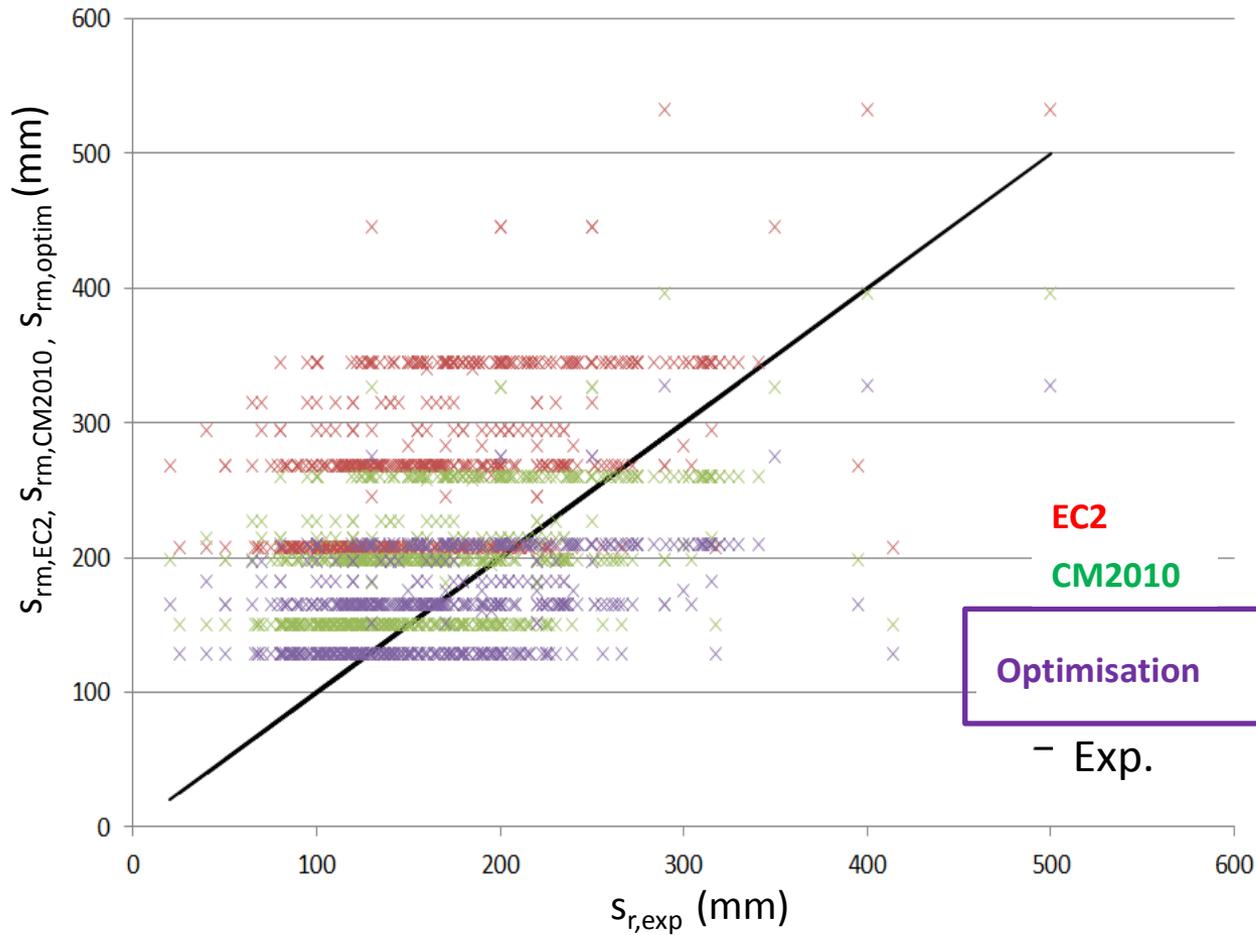
Total: n=131 essais

$$s_{r,max} = 2,32c + 0,198 \left(\frac{\phi}{\rho} \right) = 1,7 \left(1,37c + 0,117 \left(\frac{\phi}{\rho} \right) \right)$$

Eurocode 2	Code Modèle 2010
$s_{r,max} = 3,4c + 0,34 \left(\frac{\phi}{\rho} \right)$	$s_{r,max} = 2c + 0,277 \left(\frac{\phi}{\rho} \right)$

$$s_{r,max,exp} = 1,7s_{r,exp}$$





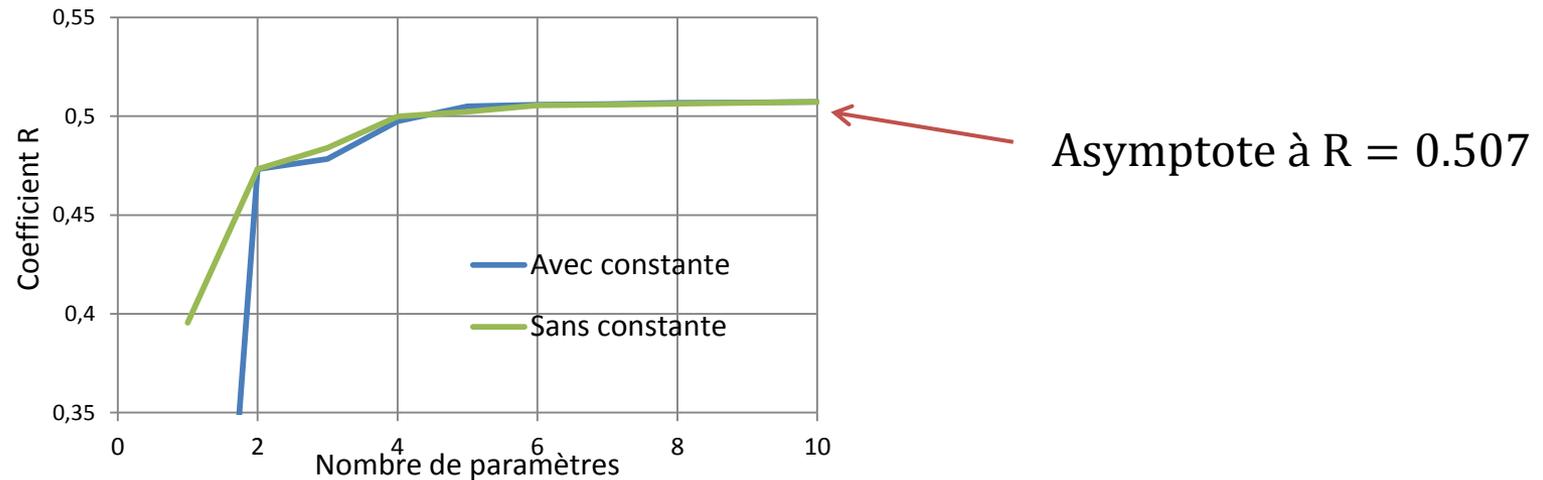
$$S_{r, codes} = \frac{S_{r, max}}{1,7}$$

- ▶ EC2 et CM2010: $s_{r,max} = k_1 \cdot c + k_2 \cdot \frac{\phi}{\rho_{eff}}$
- ▶ Supposant que $c, \phi, \rho_{eff}, f_{ct}$ sont les paramètres décrivant le problème, existe-t-il une meilleure formule pour le espacement (coefficient de régression plus élevé) en combinant ces paramètres (et les rapports entre eux)?

1 paramètre $s_{rm} = k_1 \cdot x_1$		
$s_{rm} = k_1 \cdot \phi/\rho$ "Formule "classique"	$s_{rm} = 0.180 \cdot \phi/\rho$	R=0.396
$s_{rm} = k_1 \cdot c$	$s_{rm} = 3.72 \cdot c$	R=0.212
1 paramètre + 1 constante $s_{rm} = k_0 + k_1 \cdot x_1$		
$s_{rm} = k_0 + k_1 \cdot \phi/\rho$	$s_{rm} = 60.3mm + 0.118 \cdot \phi/\rho$	R=0.475
2 paramètres $s_{rm} = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2$		
$s_{rm} = k_1 \cdot c + k_2 \cdot \phi/\rho$	$s_{rm} = 1.37 \cdot c + 0.117 \cdot \phi/\rho$	R=0.457
$s_{rm} = k_1 \cdot c/\rho + k_2 \cdot \phi/\rho$	$s_{rm} = -0.0148 \cdot c/\rho + 0.230 \cdot \phi/\rho$	R=0.459
2 paramètres + 1 constante $s_{rm} = k_0 + k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2$		
$s_{rm} = k_0 + k_1 \cdot c/\rho + k_2 \cdot \phi/\rho$	$s_{rm} = 58.7mm - 7.61 \cdot c/\rho + 0.144 \cdot \phi/\rho$	R=0.478
3 paramètres + 1 constante $s_{rm} = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3$		
$s_{rm} = k_1 \cdot 1/c + k_2 \cdot 1/\rho + k_3 \cdot \phi/\rho$	$s_{rm} = 2370 \cdot 1/c - 510 \cdot 1/\rho + 0.161 \cdot \phi/\rho$	R=0.484

...

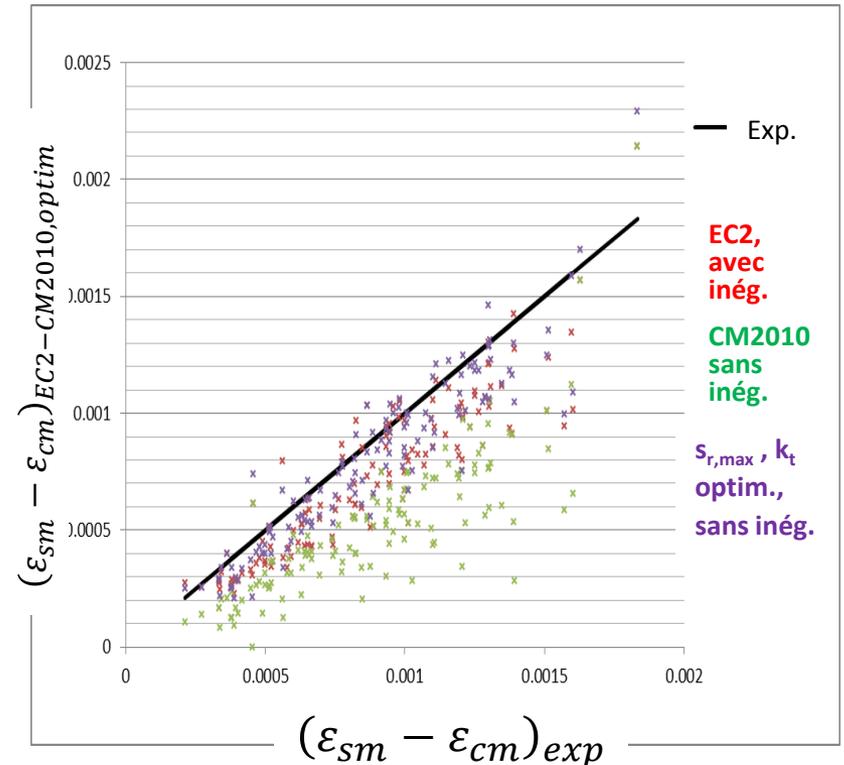
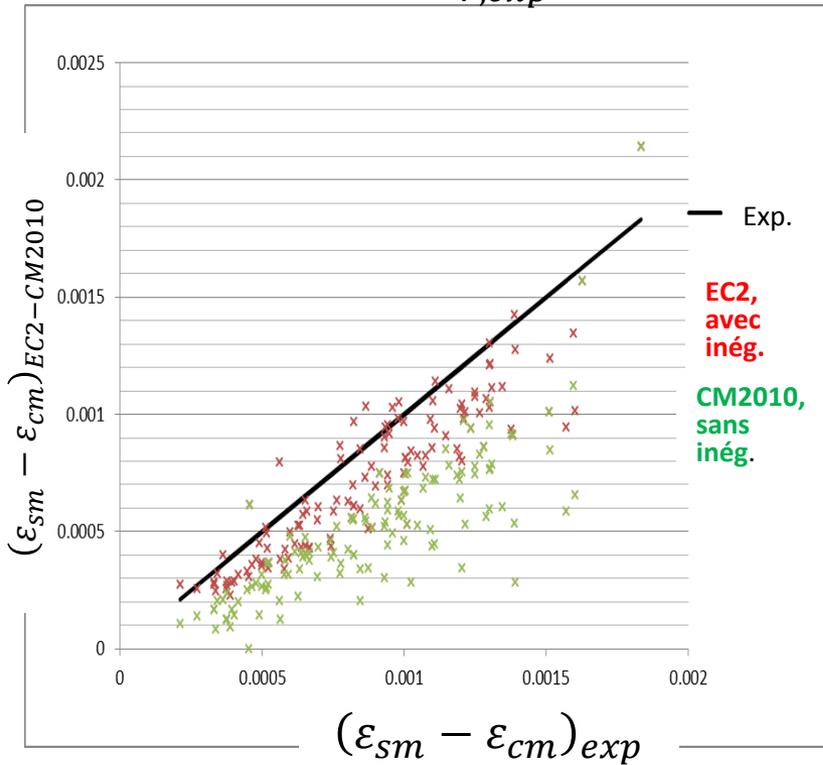
- ▶ Optimisation de la formule de l'espacement pour 1, ..., 10 paramètres et avec et sans constante
- ▶ $c, \phi, \rho_{eff}, f_{ct}, 1/c, 1/\phi, 1/\rho_{eff}, 1/f_{ct}, c/\phi, c/\rho_{eff}, c/f_{ct}, \phi/c, \phi/\rho_{eff}, \phi/f_{ct}, \rho_{eff}/c, \rho_{eff}/\phi, \rho_{eff}/f_{ct}, f_{ct}/c, f_{ct}/\phi, f_{ct}/\rho_{eff}$



- ▶ La « forme » de l'EC2 et CM2010 $s_{rm} = k_1 \cdot c + k_2 \cdot \phi/\rho$ (R=0.457) semble être un bon compromis entre simplicité et précision

Test:

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})_{exp} = \frac{W_{r,exp}}{S_{r,exp}}$$

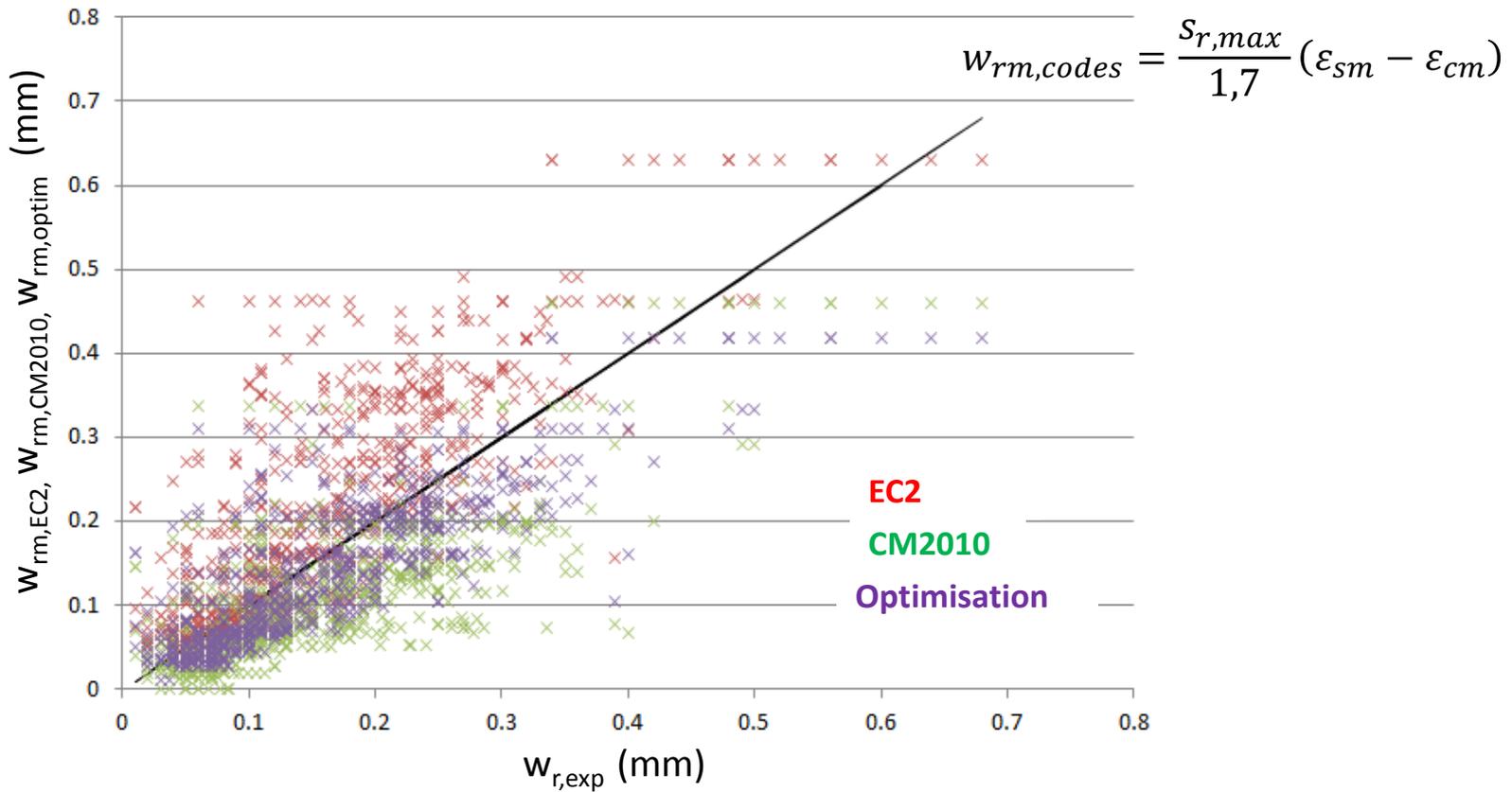


$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - \boxed{k_t} \frac{f_{ctm}}{\rho} (1 + \alpha_e \rho)}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

↓
=0,6

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - \boxed{\hat{k}_t} \frac{f_{ctm}}{\rho} (1 + \alpha_e \rho)}{E_s}$$

↓
=0,35 ≈ 0,6 x 0,6



$$W_{rm,optim} = S_{rm} \frac{\sigma_s - 0,6 k_t \frac{f_{ctm}}{\rho} (1 + \alpha_e \rho)}{E_s} \quad \text{with } S_{rm} = 1,37c + 0,117 \left(\frac{\phi}{\rho} \right)$$

► Espacement entre fissures

- L'EC2 et le CM2010 surestiment tous les deux l'ouverture des fissures
- **Les résultats sont meilleurs avec le CM2010**

► Différence de déformations

- L'EC2 et le CM2010 sous-estiment tous les deux la différence de déformations, surtout le CM2010
- Le coefficient $k_t = \beta$ est surestimé par les deux codes.
Proposition pour les tirants: $\beta \rightarrow 0,6 \beta$

► Ouverture des fissures

- L'EC2 surestime l'ouverture des fissures
- Le CM2010 sous-estime légèrement l'ouverture.

Partie 3.

Proposition d'une approche alternative pour l'évaluation de l'espacement et de l'ouverture des fissures.

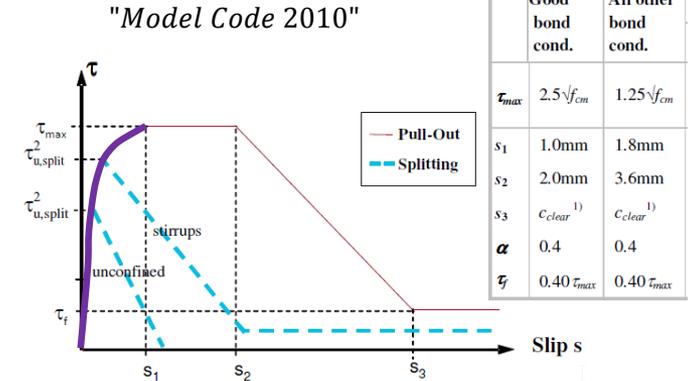
Prise en compte explicite de:

- **Loi d'adhérence non linéaire**
 - **Aire effective**

► Hypothèses

- **Distribution de contraintes uniforme** dans la section de béton
- Loi d'adhérence:

$$\tau(x) = \tau_{max} \left(\frac{s(x)}{s_1} \right)^\alpha$$



- Equation différentielle pour le glissement acier-béton
 $s(x) = u_s(x) - u_c(x)$:

$$s''(x) - \frac{4(1+n\rho)}{\phi E_s} \tau(x) = 0 \quad \text{avec } n = \frac{E_s}{E_c} \quad \text{and} \quad \rho = \frac{A_s}{A_c} \approx \frac{A_s}{A}$$

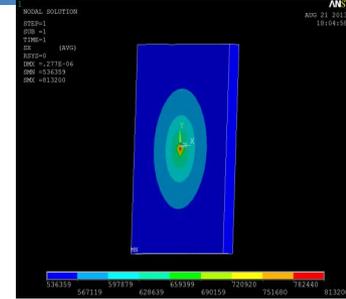
- Longueur de transfert $l_t = s_{r,max}/2$:

$$l_t = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{f_{ctm}}{4\rho\tau_{max}} \right)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} (\phi s_1^\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{2(1-\alpha)^2(1+n\rho)\tau_{max}}{1+\alpha} \frac{1}{E_s} \right)^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}$$

► Paramètre γ_c

$$\gamma_c = \frac{\sigma_{mean}^c}{\sigma_{max}^c} = \frac{A_{c,eff}}{A_c} = \frac{\rho}{\rho_{eff}} \leq 1$$

γ_c = rapport entre aire effective et aire totale de la section en béton



► En général, γ_c dépend de la section (de la distance de la fissure la plus proche)

► Pour simplicité, nous supposons γ_c constant. Il suit:

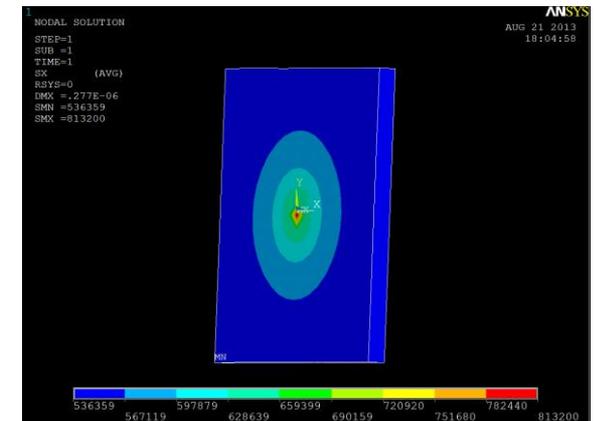
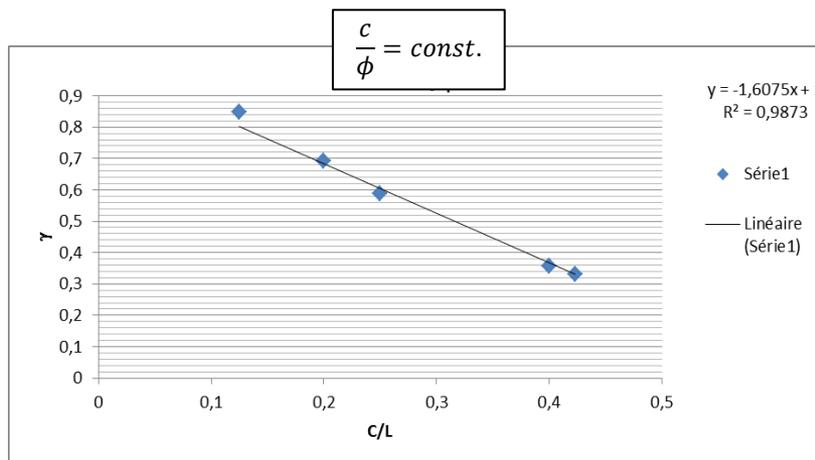
$$l_t = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{\gamma_c f_{ctm}}{4\rho\tau_{max}} \right)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} (\phi s_1^\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\frac{2(1-\alpha)^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma_c} n\rho\right) \tau_{max}}{1+\alpha} \frac{-\alpha}{E_s} \right)^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}$$

Si $\alpha = 0,35$ et
 $s_1 = 1 \text{ mm}$

$$l_t \approx 0,73 \left(\frac{\gamma_c}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{3}{4}} \quad (l_t \text{ et } \phi \text{ en mètres})$$

► Modèle EF:

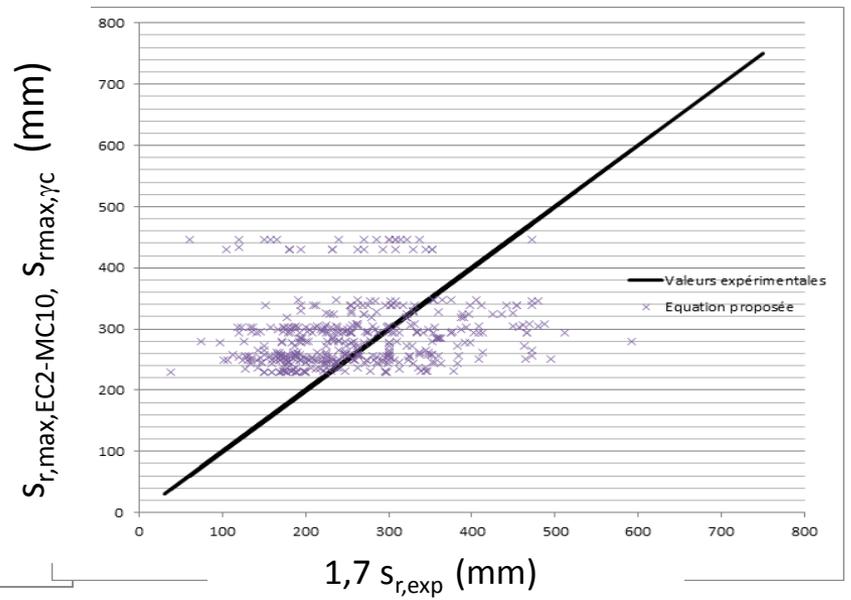
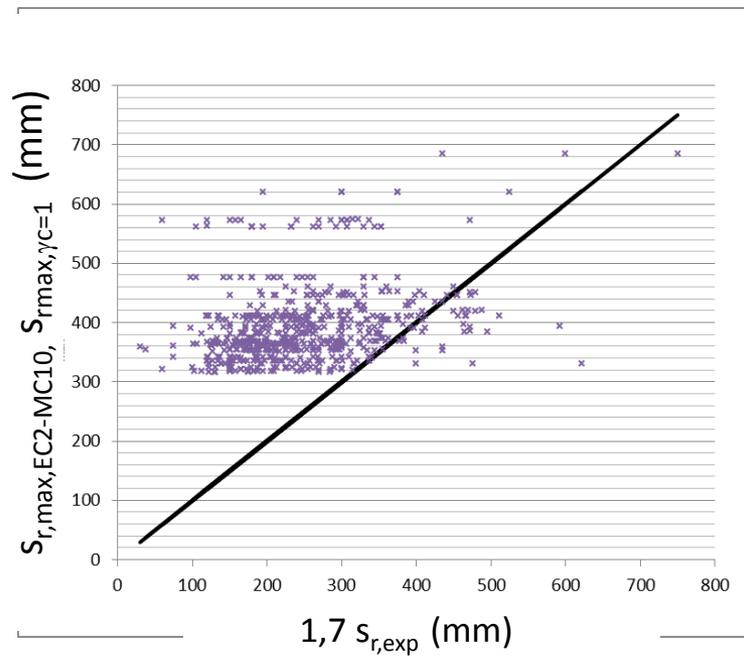
- Tirant à section carrée avec une barre au centre
- Longueur l_t
- Béton et acier élastiques linéaires
- Loi d'adhérence élastique linéaire $\tau = k s$ avec $k = 10^{10}$ Pa/m (Torre-Casanova 2012)



$$\gamma_c = \frac{\sigma_{mean}^c}{\sigma_{max}^c} \approx 1 - 1.6 \frac{c}{l_t} \leq 1$$

$$\gamma_c = 1$$

$$\gamma_c \approx 1 - 1.6 \frac{c}{l_t} \leq 1$$



- ▶ La loi d'adhérence non linéaire est prise en compte par l'approche de Balazs (1993)
- ▶ La distribution non uniforme des contraintes peut être prise en compte par le coefficient $\gamma_c = \frac{A_{c,eff}}{A_c}$
- ▶ Sous les mêmes hypothèses, il est possible de trouver une formule pour l'ouverture (voir rapport CEOS.fr)
- ▶ Il est nécessaire de trouver des expressions fiables pour γ_c par des simulations EF

- ▶ **Cette approche semble prometteuse**
- ▶ **L'EC2 devrait permettre cette approche « précise », ou d'autres méthodes analogues**

Merci

$$w_r = 2 \left(\frac{1 + \alpha}{8(1 + n\rho)} \frac{(\sigma_{s2,0})^2}{E_s \tau_{max}} \phi S_1^\alpha \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

**A l'apparition des fissures
(Balazs 1993)**

$$\text{avec } \sigma_{s2,0} = \sigma_s \text{ at crack} = f_{ct} \frac{1+n\rho}{\rho} = \frac{F_0}{A_s}$$

$$w_r = 2 \left(\frac{1 + \alpha}{8 \left(1 + \frac{1}{\gamma_c} n\rho\right)} \frac{\sigma_{s2,0} (2\sigma_{s2} - \sigma_{s2,0})}{E_s \tau_{max}} \phi S_1^\alpha \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

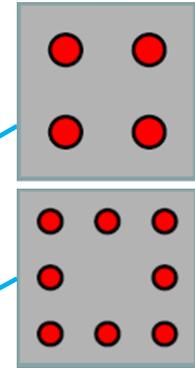
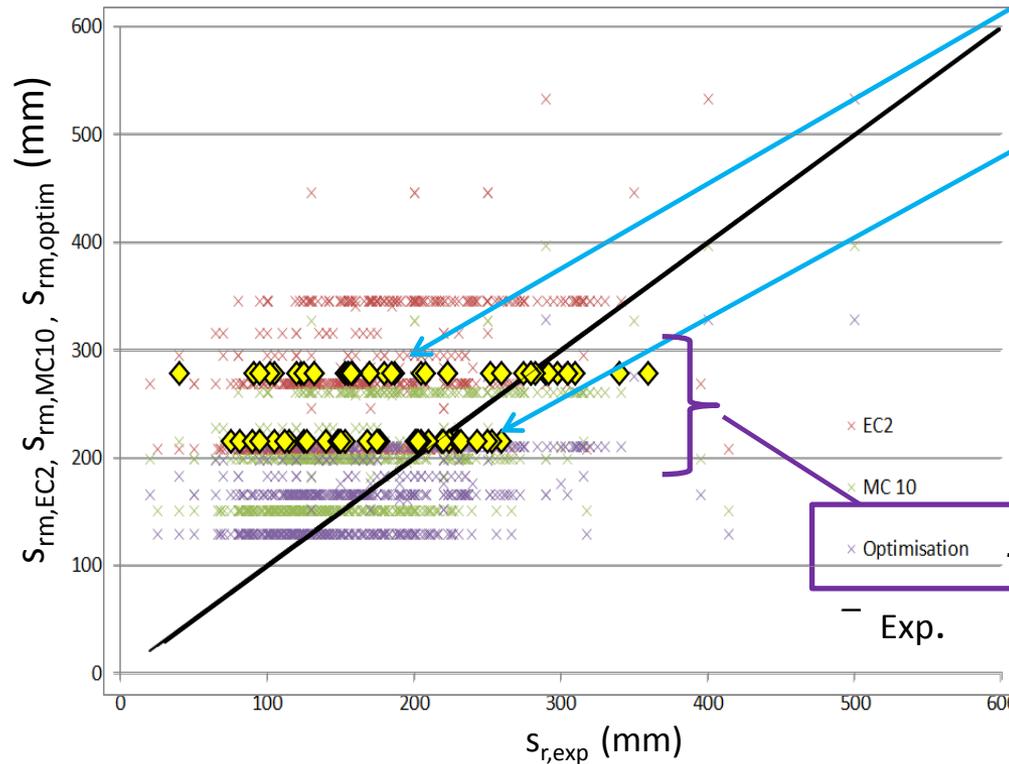
**Pour des niveaux
de contrainte plus élevés
(CEOS.fr)**

$$\text{avec } \sigma_{s2,0} = f_{ct} \frac{\gamma_c + n\rho}{\rho} = \frac{F_0}{A_s}$$

$$\text{et } \sigma_{s2} = \sigma_s \text{ at crack} = \frac{F}{A_s}$$

CEOS.FR (GINGER- CEBTP/ DEXTRA) - 5 essais

- 3 essais: 355 x 355 x 3200, HA25, c=67,5 mm ($\rho_{\text{eff,codes}} = \rho$)
- 2 essais: 355 x 355 x 3200, HA16, c=51 mm ($\rho_{\text{eff,codes}} \approx \rho$)



L'optimisation ne fonctionne pas très bien pour ces sections

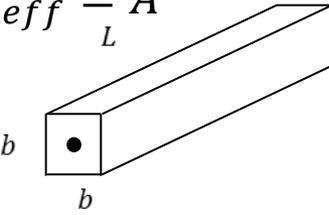
⇒ $\rho_{\text{eff}} ??$

Eurocode 2	CM2010 (09/2011)	Optimisation
$s_{r,max} = 3,4c + 0,34 \left(\frac{\phi}{\rho} \right)$	$s_{r,max} = 2c + 0,278 \left(\frac{\phi}{\rho} \right)$	$s_{r,max} = 2,32c + 0,198 \left(\frac{\phi}{\rho} \right)$

ρ ou ρ_{eff} ?

Pour une distribution de contraintes non uniforme
 $A_{c,eff} \neq A_c$
 $\rho_{eff} \neq \rho$

Toutefois, EC2 et CM2010 donnent
 $A_{c,eff} = A$



La définition de $A_{c,eff}$ devrait être revue

L'hypothèse de τ constant (contrainte d'adhérence) est aussi discutable

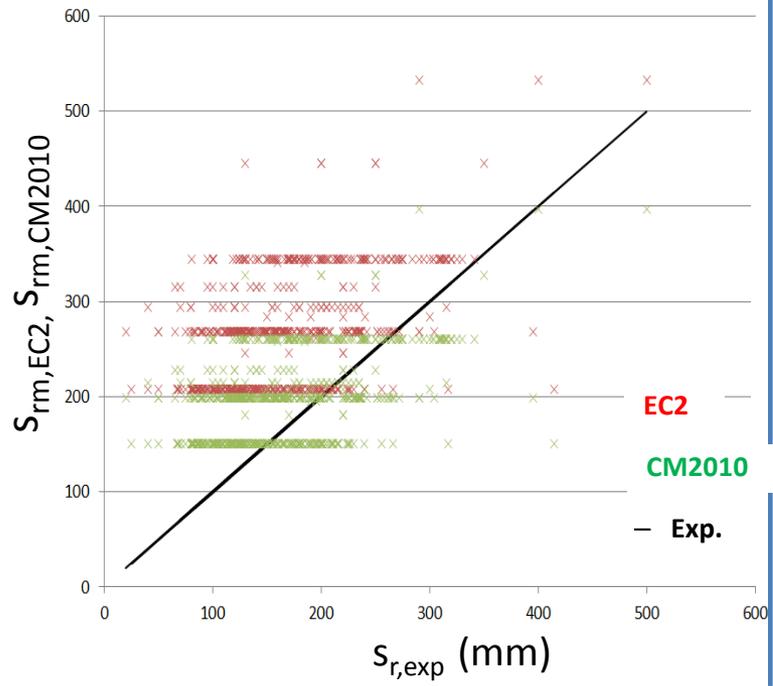
Une approche différente devrait être développée

Draft EC2-July 1999

$$S_{rm,EC2} := S_{r,max,EC2} / 1,7$$

$$S_{rm,MC10} := S_{r,max,MC10} / 1,7$$

FIB bulletin, background CM2010 (2014)



$$\begin{cases} W_{rm,EC2} = S_{rm,EC2} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \\ \varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s} \end{cases}$$

$$W_{rm,CM2010} = S_{rm,CM2010} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

